Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Jürgen Dassow

Magdeburg, 11. Februar 2013

Logik

Klausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [3 Punkte]
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über den Aufbau (struktureller Induktion), dass jeder aussagenlogische Ausdruck auf eine schließende Klammer oder eine Variable endet.

Aufgabe 2 [3 Punkte]
Man untersuche, ob der Ausdruck

$$A = (((q \wedge \neg r) \vee p) \vee (\neg p \wedge (q \rightarrow r)))$$

eine Tautologie ist oder nicht.

Aufgabe 3 [6 Punkte]
Bestimmen Sie für folgende Ausdrücke jeweils äquivalente Ausdrücke in disjunktiver Normalform und in konjunktiver Normalform.

(a) $A_1 = (p \vee \neg q)$
(b) $A_2 = (((p \vee q) \wedge (r \vee \neg q)) \vee p)$

Aufgabe 4 [6 Punkte]
Man entscheide mit der aussagenlogischen Resolutionsmethode, ob der Ausdruck

$$A = ((\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge \neg p)$$

erfüllbar oder unerfüllbar ist.

Aufgabe 5 [8 Punkte]
Geben Sie zu jedem der folgenden Ausdrücke an, ob es sich um einen Hornausdruck handelt oder nicht. Entscheiden Sie gegebenenfalls mittels des Algorithmus von Horn, ob der jeweilige Ausdruck erfüllbar ist oder nicht, und geben Sie bei Erfüllbarkeit die ermittelte erfüllende Belegung an.

$$A_1 = ((\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3)),$$
$$A_2 = ((\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1),$$
$$A_3 = ((p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3)),$$
$$A_4 = (p_4 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4) \wedge \neg p_3 \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_2 \vee p_1) \wedge p_2).$$

Aufgabe 6 [4 Punkte]
Es seien $\mathcal{S} = (K, F_1, R_1, F_2, R_2, \ldots)$ eine Signatur und *var* eine Menge von Variablen. Geben Sie die Definition der Menge der Terme $T(\mathcal{S})$ über $\mathcal{S}$ an.

Aufgabe 7 [6 Punkte]
Legen Sie jeweils fest, ob x, y, f, g bzw. h Konstante, Variable, Funktionssymbol (Stelligkeit?) oder Relationssymbol (Stelligkeit?) sein muss, damit die folgenden Wörter Terme bzw. prädikatenlogische Ausdrücke sind bzw. begründen Sie, dass die Wörter weder Term noch Ausdruck werden können.

(a) x
(b) $f(g(x), h(y))$
(c) $\exists x f(g(x), \forall y h(y))$
(d) $(\exists x f(g(x, y)) \rightarrow \forall y h(y))$

Bitte wenden!

Aufgabe 8 [8 Punkte]
Gegeben sei eine Signatur $\mathcal{S}$ durch

$$K = \{k\}, \quad F_1 = \{f\}, \quad F_2 = \{h\}, \quad R_3 = \{r\} \quad \text{und}$$
$$F_3 = F_4 = \cdots = R_1 = R_2 = R_4 = \cdots = \emptyset$$

und eine Interpretation $I = (U, \tau)$ mit

$$U = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$\tau(k) = 0, \quad \tau(f)(x) = x + 2, \quad \tau(h)(x, y) = x + y \quad \text{und} \quad \tau(r) = \{(x, y, z) \mid x + y = z\}$$

sowie eine Belegung α mit $\alpha(x) = 3$, $\alpha(y) = 4$ und $\alpha(z) = 2$.
Bestimmen Sie die Werte der folgenden Terme bzw. Ausdrücke bezüglich I und α:

(a) $f(k)$
(b) $r(x, f(y), f(h(x, y)))$
(c) $\forall x\, r(x, k, x)$
(d) $\forall x \forall y\, r(x, f(y), f(h(x, y)))$

Aufgabe 9 [4 Punkte]
Es seien $\mathcal{S}$ eine Signatur mit

$$F_1 = \{f, g\}, \quad R_3 = \{r\}, \quad K = R_1 = F_2 = R_2 = F_3 = R_i = F_i = \emptyset \text{ für } i \geq 4,$$

sowie $A = \forall x \exists y r(x, g(y), f(z))$ ein prädikatenlogischer Ausdruck.

(a) Man gebe eine Interpretation I_1 an, die Modell für $\{A\}$ ist.
(b) Man gebe eine Interpretation I_2 an, die kein Modell für $\{A\}$ ist.

Aufgabe 10 [6 Punkte]
Man überführe den folgenden Ausdruck über eine pränexe Normalform in eine bereinigte Skolemform.

$$(\forall u \exists y\, (r_1(x, g(y), u) \vee \neg \exists x\, r_2(x)) \wedge \neg \exists x \forall z\, \neg r_3(f(x, z), y)).$$

Aufgabe 11 [6 Punkte]
Bestimmen Sie drei bis auf Variablenumbenennung verschiedene Resolventen der Klauseln

$$\{\neg r_1(x, y), \neg r_1(f(a), g(u, b)), r_2(x, z)\} \quad \text{und} \quad \{r_1(f(x), g(a, z)), \neg r_2(f(a), b), \neg r_2(a, z)\},$$

wobei a, b Konstantensymbole, x, y, z, u Variablen, r_1, r_2 Relationssymbole und f, g Funktionssymbole sind.

Aufgabe 12 [8 Punkte]
Anna, Ben und Chris sind musikalische Geschwister und spielen Instrumente. Anna spielt alles, was Chris spielt. Ben spielt Gitarre. Chris spielt mindestens ein Instrument, aber nicht Gitarre. Wer Flöte spielt, spielt auch noch ein weiteres Instrument. Wer Gitarre spielt, spielt kein Klavier. Ermitteln Sie durch Resolvieren, ob Anna Klavier spielt.

Aufgabe 13 [4 Punkte]
Geben Sie die Definition der Menge der Ausdrücke der dynamischen Aussagenlogik an.